УДК 330.4
DOI:10.24412/2782-4845-2023-8-80-94

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕЧЕТКИХ РЕЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

И.В. Черпаков, Липецкий филиал ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», Липецк, Россия

Аннотация. *Целью данного исследования является рассмотрение методов решения линейных нечетких реляционных уравнений (НРУ) и их программная реализация. К уравнениям подобного типа сводятся, например, обратные задачи нечеткого логического вывода, применяемые для моделирования различных типов систем, в том числе, социально-экономических. В вводной части статьи обосновывается актуальность выбранной темы в рамках практического применения инструментов нечеткого вывода при моделировании систем различного типа. В основной части статьи рассмотрены необходимые понятия теории нечетких соответствий, требуемые для формальной постановки задачи решения НРУ, рассмотрены основные расширения логических операций, применяемые в теории нечетких множеств. Рассмотрена постановка задачи решения НРУ в общем виде, приведены формы простейших НРУ, необходимые и достаточные условия разрешимости через остаточные операторы. Основную часть статьи занимает рассмотрение задачи решения и ее программной реализации линейных (полиномиальных) НРУ с композицией. Рассматриваются необходимые и достаточные условия разрешимости, структура решения, алгоритмы формирования элементов структуры решений (основания, ответвления, среднего решения). Так же приведен пример решения экономической задачи, рассмотрена программная реализация на языке программирования Python, дана интерпретация полученных результатов для структурных элементов множества решений. В заключительной части статьи приведены основные результаты исследования и выводы.*

Ключевые слова: *обратная задача для нечетких соответствий, линейные нечеткие реляционные уравнения, инвертор, t-норма, t-конорма, импликатор, остаточные операторы*

Для цитирования: Черпаков И.В., Постановка задачи и программная реализация решения линейных нечетких реляционных уравнений // ЭФО. Экономика. Финансы. Общество. 2023. №4(8) С.80-94. DOI: 10.24412/2782-4845-2023-8-80-94

PROBLEM STATEMENT AND SOFTWARE IMPLEMENTATION OF SOLVING LINEAR FUZZY RELATIONAL EQUATIONS

I.V. Cherpackov, Lipetsk Branch of FSOBU HE "Financial University under the Government of the Russian Federation", Lipetsk, Russia

Annotation. *The purpose of this study is to consider the methods of solving linear fuzzy relational equations (FRE) and their software implementation. For example, inverse fuzzy logic inference problems used for modelling various types of systems, including socio-*

economic ones, are reduced to equations of this type. The introductory part of the article substantiates the relevance of the chosen topic within the framework of practical application of fuzzy inference tools in modelling systems of various types. In the main part of the article the necessary concepts of the theory of fuzzy correspondences required for the formal formulation of the problem of solving FRE are considered, the basic extensions of logical operations used in the theory of fuzzy sets are considered. The formulation of the problem of solving the FRE in a general form is considered, the forms of the simplest FREs, necessary and sufficient conditions of solvability through residual operators are given. The main part of the article is occupied by consideration of the problem of solving and its software implementation of linear (polynomial) FREs with composition. Necessary and sufficient conditions of solvability, the structure of the solution, algorithms of formation of elements of the structure of solutions (base, branch, average solution) are considered. An example of the solution of the economic problem is also given, the software implementation in the Python programming language is considered, the interpretation of the obtained results for the structural elements of the set of solutions is given. In the final part of the article the main results of the research and conclusions are given.

Key words: *inverse problem for fuzzy correspondences, linear fuzzy relational equations, invertor, t-norm, t-conorm, implicator, residual operators*

Введение

В задачах нечеткого вывода, когда взаимосвязь параметров (показателей) трудноформализуема, применяются различные системы нечетких правил, на основании которых получаются количественные значения, интерпретируемые в рамках рассматриваемой системы [11]. Вместе с тем, достаточно часто возникает обратная задача: на основании известной системы нечетких правил, набора значений известных параметров и результатов требуется определить значения (или диапазоны допустимых изменений) наборов значений неизвестных параметров. На языке нечетких реляционных соответствий формальная запись указанной задачи представляет собой нечеткое реляционное уравнение (НРУ).

Теоретическое решение НРУ на полных дистрибутивных решетках, в частности, на единичном отрезке, известно [9], однако число упоминаний практического применения разработанных алгоритмов решений невелико. Актуальность темы статьи заключается в попытке рассмотреть практическое применение методов решения линейных НРУ с различными типами композиций нечетких соответствий и получить интерпретацию результатов.

Данная статья является логическим продолжением работ [6, 8].

Основная часть

1. Необходимые понятия теории нечетких соответствий

Пусть даны три нечетких соответствия Q, R и S, определенные на декартовых произведениях множеств

$$\begin{cases} A=\{a_i\},\ i=\overline{1,n}; \\ B=\{b_j\},\ j=\overline{1,m}; \\ C=\{c_t\},\ t=\overline{1,k} \end{cases} \tag{1}$$

следующим образом:

$$Q=\left\{\mu_Q(a_i,b_j),(a_i,b_j)\right\},a_i\in A,b_j\in B,\mu_Q(a_i,b_j)\in[0;1], \tag{2}$$

$$R=\left\{\mu_R(b_j,c_t),(b_j,c_t)\right\},b_j\in B,c_t\in C,\mu_R(b_j,c_t)\in[0;1]. \tag{3}$$

$$S=\left\{\mu_S(a_i,c_t),(a_i,c_t)\right\},a_i\in A,c_t\in C,\mu_S(a_i,c_t)\in[0;1], \tag{4}$$

где $\mu_Q(a_i,b_j)\in[0;1]$, $\mu_R(b_j,c_t)\in[0;1]$ и $\mu_S(a_i,c_t)\in[0;1]$ — значения функций принадлежности.

Пусть дана композиция нечетких соответствий

$$Q\otimes R=S, \tag{5}$$

где $\otimes$ — композиция вида

$$\max_{b_j\in B}\left\{T\left(\mu_Q\left(a_i,b_j\right),\mu_R\left(b_j,c_t\right)\right)\right\}, \tag{6}$$

называемая так же *круговой композицией*, или вида

$$\min_{b_j\in B}\left\{I\left(\mu_Q\left(a_i,b_j\right),\mu_R\left(b_j,c_t\right)\right)\right\}, \tag{7}$$

$$\min_{b_j\in B}\left\{I\left(\mu_Q\left(b_j,c_t\right),\mu_R\left(a_i,b_j\right)\right)\right\}. \tag{8}$$

Здесь $T(x,y)$ и $I(x,y)$ — расширения стандартных логических операций конъюнкции и импликации соответственно на единичном отрезке (подробнее см. [6]).

В случае, если композиция нечетких соответствий соответствует выражению (6), говорят, что имеет место $\max-T$ *композиция*. В случае, если композиция нечетких соответствий соответствует выражениям (7) или (8), говорят, что имеет место $\min-I$ *композиция*.

Наиболее часто используемые на практике t-нормы приведены в табл. 1.

Таблица 1. **Часто применяемые t-нормы***

t-норма	Название
$T(x,y)=\min(x,y)$	минимум
$T(x,y)=xy$	произведение (вероятностное произведение)
$T(x,y)=\max(x+y-1,0)$	t-норма Лукасевича

*** составлено автором**

Наиболее часто используемые на практике импликаторы приведены в табл. 2.

Таблица 2.* Некоторые применяемые импликаторы

Импликатор	Название
$I(x,y)=\max(1-x,y)$	импликатор Клина-Дайнеса
$I(x,y)=\min(1-x+y,1)$	импликатор Лукасевича
$I(x,y)=1-x+xy$	импликатор Клина-Дайнеса-Лукасевича

*** составлено автором**

Кроме t-нормы и импликатора можно ввести расширение операции отрицания, называемое *инвертором* и обозначаемое $N(x)$. *Стандартным инвертором* называется функция

$$N(x)=1-x, \tag{9}$$

определенная на единичном отрезке. Подробнее инверторы, t-нормы и импликаторы рассмотрены в [6, 8].

Можно показать, что для произвольной t-нормы $T(x,y)$ и инвертора $N(x)$ функция $N(T(x,N(y)))$ представляет собой импликатор, т. е.

$$I(x,y)=N(T(x,N(y))). \tag{10}$$

В этом случае говорят, что t-норма и инвертор *индуцируют* импликатор. Примеры:

— импликатор Клина-Дайнеса индуцирован стандартным инвертором и операцией минимума;

— импликатор Лукасевича индуцирован стандартным инвертором и t-нормой Лукасевича;

— импликатор Клина-Дайнеса-Лукасевича индуцирован стандартным инвертором и t-нормой Лукасевича.

2. Постановка задачи решения НРУ

Обратной задачей для композиции нечетких соответствий вида (5) называется нахождение:

— Q при известных R, S и $\otimes$;

— R при известных Q, S и $\otimes$.

Нечеткое реляционное уравнение (НРУ) — формальная запись обратной задачи для нечетких соответствий, записываемое как матричное уравнение

$$X\otimes R=S \tag{11}$$

или

$$Q\otimes X=S, \tag{12}$$

где X — неизвестное.

Композиция $\otimes$, заданная в соответствии с выражением (6), обладает свойством коммутативности, т. е.

$X\otimes R=R\otimes X$,

поэтому НРУ (11) и (12) для $\otimes = \max - T$ совпадают. В этом случае просто говорят про $\max - T$ уравнение.

Классификация и подробная постановка задачи решения НРУ приведена в [8].

3. Простейшие НРУ и нахождение их решений

В случае, если четкие множества (1) являются одноэлементными, т. е. при $n = m = k = 1$, НРУ (11)–(12) можно записать в одной из следующих форм:

$$T(x,a) = b, \tag{13}$$

$$I(x,a) = b, \tag{14}$$

$$I(a,x) = b. \tag{15}$$

Уравнения вида (13)–(15) называются *простейшими (атомарными)* НРУ. Алгоритм решения и его программная реализация для произвольной t-нормы и импликатора рассмотрены в [8].

Необходимые и достаточные условия, при которых НРУ (13)–(15) разрешимы, приведены в табл. 3.

Таблица 3. **Необходимые и достаточные условия разрешимости простейших НРУ***

Уравнение	Необходимые и достаточные условия разрешимости
$T(x,a) = b$	$a \geq b$
$I(x,a) = b$	$a \leq b$
$I(a,x) = b$	$N(a) \leq b$, где N — инвертор, через который индуцирован импликатор

*** составлено автором на основе [9, 10]**

Решения НРУ (13)–(15) (если они существуют) определяются через *остаточные операторы*

$$T^{-}(a,b) = \min\{z \in [0;1] \mid T(z,a) \geq b\}, \tag{16}$$

$$T^{+}(a,b) = \max\{z \in [0;1] \mid T(z,a) \leq b\}, \tag{17}$$

$$I_l^{-}(a,b) = \min\{z \in [0;1] \mid I(z,a) \leq b\}, \tag{18}$$

$$I_l^{+}(a,b) = \max\{z \in [0;1] \mid I(z,a) \geq b\}, \tag{19}$$

$$I_r^{-}(a,b) = \min\{z \in [0;1] \mid I(a,z) \geq b\}, \tag{20}$$

$$I_r^{+}(a,b) = \max\{z \in [0;1] \mid I(a,z) \leq b\}. \tag{21}$$

Алгоритм решения простейших НРУ:

1. Для НРУ (13)–(15) проверяется выполнение необходимых и достаточных условий разрешимости, приведенных в табл. 3. Если условие для конкретного уравнения не выполняется, то уравнение не имеет решения (закончить алгоритм).

2. Если для простейшего НРУ выполняются необходимые и достаточные условия разрешимости, то вычисляются пары остаточных операторов:

— для уравнения $T(x,a)=b$ рассчитываются значения операторов по формулам (16) и (17);

— для уравнения $I(x,a)=b$ рассчитываются значения операторов по формулам (18) и (19);

— для уравнения $I(a,x)=b$ рассчитываются значения операторов по формулам (20) и (21).

3. Строится множество решений в виде отрезка:

— для уравнения $T(x,a)=b$ решением будет отрезок $\left[T^{-}(a,b),T^{+}(a,b)\right]$;

— для уравнения $I(x,a)=b$ решением будет отрезок $\left[I_l^{-}(a,b),I_l^{+}(a,b)\right]$;

— для уравнения $I(a,x)=b$ решением будет отрезок $\left[I_r^{-}(a,b),I_r^{+}(a,b)\right]$.

4. Постановка задачи решения линейных НРУ

Рассмотрим линейное (полиномиальное) НРУ. В этом случае для четких множеств (1) имеет место $n=k=1$. Формально в общем виде линейное уравнение можно записать как

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = b \tag{22}$$

(левое НРУ) или

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} = b \tag{23}$$

(правое НРУ), где $\otimes$ — композиция типа $\max-T$ или $\min-I$. В более компактной форме (22) и (23) могут быть записаны как

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix}^T = b \tag{24}$$

и

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix}^T = b \tag{25}$$

соответственно, где T — символ транспонирования.

5. Решение линейных $\max - T$ ***уравнений***

Рассмотрим НРУ вида (22) с $\max - T$ композицией. В силу коммутативности этой композиции уравнения (22) и (23) совпадают, поэтому нет смысла отдельно рассматривать форму (23).

В общем случае НРУ (22) имеет не единственное решение. В структуре решений выделяют *основание* (*stem*) и *ответвления* (*offshoots*). Основание G представляет собой *наибольшее* (*greatest*) решение. Ответвления поэлементно не превышают основания и представляют собой *наименьшие* (*least*) решения. Схематично структура решения НРУ (22) приведена на рис. 1.

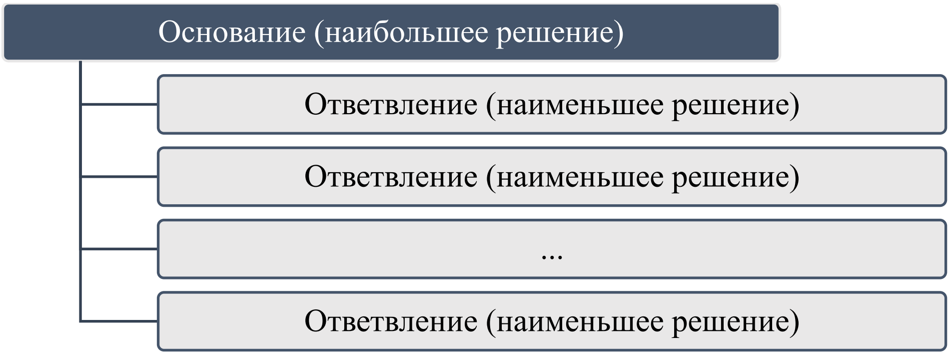

Рисунок 1. Структура решения линейного НРУ с $\max - T$ ***композицией***

Решение уравнения (22) существует не всегда. Можно показать (например, [9]), что уравнение (22) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$b \le \max(a_j). \tag{26}$$

При этом

$$G = \begin{bmatrix} T^{+}(a_1,b) & T^{+}(a_2,b) & \cdots & T^{+}(a_m,b) \end{bmatrix} \tag{27}$$

будет наибольшим решением (основанием).

При выполнении условия (26) множеством ответвлений M_p (наименьших решений) НРУ (22) будет множество

$$\{M_p \mid b \le a_j\}, \text{ где } \left(M_p\right)_i = \begin{cases} T^{-}(a_j,b), \text{ если } i = j; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{28}$$

Количество ответвлений будет равно количеству элементов a_j, для которых выполняется условие $b \le a_j$, а каждое ответвление будет состоять из нулевых элементов, за исключением элемента с индексом j, который рассчитывается по формуле (16).

На множестве матриц (векторов) одинаковой размерности можно ввести отношение частичного порядка $\leq$. Пусть даны матрицы $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$. Говорят, что $A \leq B$, если

$$\left(\forall i, j\right)\left(a_{ij} \leq b_{ij}\right). \quad (29)$$

В случае векторов $A=\{a_i\}$ и $B=\{b_i\}$ говорят, что $A \leq B$, если

$$\left(\forall i\right)\left(a_i \leq b_i\right). \quad (30)$$

Если для условий сравнения в (29) и (30) существует хотя бы одна пара элементов в A и B, для которых эти условия нарушаются, то матрицы (векторы) являются *не сравнимыми*. В этом случае используют обозначение $A \parallel B$.

Пример 1. Для матриц

$$A=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 1.0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 & 1.0 \\ 0.7 & 0.9 & 1.0 \\ 0.6 & 0.9 & 0.6 \\ 0.4 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

условие (29) выполняется: каждый элемент матрицы A не превышает соответствующего элемента матрицы B, следовательно, $A \leq B$.

Векторы

$$A=\begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

являются не сравнимыми, т. к. $a_3 > b_3$, но для остальных элементов $a_i \leq b_i$. ■

Для основания G и множества ответвлений $\left\{M_p\right\}$ каждое ответвление не больше G, т. е.

$$\left(\forall M_i \in M_p\right)\left(M_i \leq G\right). \quad (31)$$

При этом все $M_i \in \left\{M_p\right\}$ попарно не сравнимы друг с другом:

$$\left(\forall i, j \mid i \neq j\right)\left(M_i \parallel M_j\right). \quad (32)$$

Пусть

$$G=\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_j & \cdots & g_m \end{pmatrix}$$

и

$$M=\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_j & \cdots & \gamma_m \end{pmatrix}$$

основание и некоторое ответвление соответственно. Для элементов G и M выполняются соотношения

$\gamma_1 \le g_1, \dots, \gamma_j \le g_j, \dots, \gamma_m \le g_m$.

Все векторы D, такие, что $M \le D \le G$ так же будут решениями НРУ. Так как основания попарно не сравнимы, то для определения полного множества решений НРУ находят все решения между основанием и каждым из ответвлений.

Пример 2. Пусть

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

является основанием некоторого линейного НРУ с $\max - T$ композицией. Пусть

$$M_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

являются ответвлениями этого уравнения.

Тогда полное множество решений будет состоять из всех решений, находящихся между G и M_1, G и M_2, G и M_3. Каждый элемент вектора какого-либо решения может быть скалярным значением (когда $g_j = \gamma_{ij}$) или представлять собой отрезок значений $[\gamma_{ij}, g_j]$ (когда $g_j \ge \gamma_{ij}$).

Условно полное множество решений можно записать как

$$\begin{cases} [0.4, 0.7] & [0.0, 1.0] & [0.0, 0.4] & [0.0, 0.5] & [0.0, 0.2], \\ [0.0, 0.7] & [0.0, 1.0] & [0.2, 0.4] & [0.0, 0.5] & [0.0, 0.2], \\ [0.0, 0.7] & [0.0, 1.0] & [0.0, 0.4] & [0.1, 0.5] & [0.0, 0.2]. \end{cases}$$

Каждая строка показывает множество решений между G и ответвлением. Отрезки показывают допустимые изменения соответствующего элемента вектора. ■

Для $\{M_p\}$ может существовать «общая часть» $\overline{M}$, такая, что

$$\left(\forall M_i \in \{M_p\}\right)\left(M_i \le \overline{M}\right). \quad (33)$$

В этом случае $\overline{M}$ называется *средним (mean) решением* НРУ.

На практике элементы $\overline{M}$ вычисляются как максимальные поэлементные значения для всех соответствующих индексов элементов из множества $\{M_p\}$. Если

$$\begin{cases} M_{p_1} = \{m_{ij}^1\} \\ M_{p_2} = \{m_{ij}^2\} \\ \dots \\ M_{p_w} = \{m_{ij}^w\} \end{cases}$$

множество ответвлений, то

$$\overline{M} = \left\{ \max_{v=1,2,\ldots,w} \left\{ m_{ij}^{v} \right\} \right\}. \tag{34}$$

Нахождение $\overline{M}$ бывает полезным при оценке решения НРУ. Значения элементов $\overline{M}$ представляют собой граничные значения, при которых появляется несравнимость ответвлений.

Пример 3. Найдем среднее решение для множества ответвлений из примера 2:

$M_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$,

$M_2 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$,

$M_3 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$.

Элементы среднего решения вычисляются как максимум по элементам с одинаковыми индексами по всем ответвлениям:

$\overline{M_1} = \max\left\{0.4; 0.0; 0.0\right\} = 0.4$,

$\overline{M_2} = \max\left\{0.0; 0.0; 0.0\right\} = 0.0$,

$\overline{M_3} = \max\left\{0.0; 0.2; 0.0\right\} = 0.2$,

$\overline{M_4} = \max\left\{0.0; 0.0; 0.1\right\} = 0.1$,

$\overline{M_5} = \max\left\{0.0; 0.0; 0.0\right\} = 0.0$.

Среднее решение $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$. ■

Таким образом, можно сформулировать следующий алгоритм полного решения линейных НРУ с $\max - T$ композицией вида (22):

1. Проверяется необходимое и достаточное условие разрешимости (26). Если оно не выполняется, то НРУ решения не имеет (закончить алгоритм), иначе далее.
2. Определяется наибольшее решение по формуле (27).
3. Определяется количество наименьших решений. Оно равно количеству a_j, для которых выполняется условие $b \le a_j$.
4. Вычисляется множество ответвлений $\left\{M_p\right\}$ по формуле (28).
5. Определяется среднее решение $\overline{M}$ по формуле (34).

Пример 4. Рассмотрим несколько искусственный пример, который, однако, позволяет получить некоторые оценки при решении конкретной задачи с использованием инструментария решений линейного НРУ вида (22) с $\max - T$ композицией.

Пусть некоторый товар оценивается по $j=6$ условным характеристикам. Для некоторой однородной группы людей, представляющей целевую аудиторию товара, требуется определить степени востребованности той или иной характеристики по средней минимальной оценке товара по целевой группе. Пусть известны степени наличия характеристик a_j у товара, определенные на основе мнений экспертов

$$\begin{pmatrix}1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.8 & 0.4 & 0.7\end{pmatrix},$$

и пусть известна средняя оценка товара, составляющая 0.4.

На основе этих данным можно составить НРУ в форме (25):

$$\begin{pmatrix}1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.8 & 0.4 & 0.7\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6\end{pmatrix}^T=0.4.$$

Здесь x_j — степени востребованности характеристики, T — символ транспонирования.

В качестве t-нормы композиции $\otimes=\max-T$ можно выбрать

$$T(x,y)=\max(x+y-1,0),$$

т. к. величина $T(x,y)$ будет ненулевой (>0), если суммарное значение степени выраженности характеристики и степени востребованности товара ($x+y$) будет больше 1.

Таким образом, имеем линейное НРУ

$$\begin{pmatrix}1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.8 & 0.4 & 0.7\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6\end{pmatrix}^T=0.4,$$

где

$$\otimes=\max-T,\ T(x,y)=\max(x+y-1,0).$$

Здесь

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.8 & 0.4 & 0.7\end{pmatrix},\ b=0.4.$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости (26) выполняется:

$$b=0.4\le\max(a_j)=1.0,$$

следовательно, уравнение разрешимо.

Решение данного уравнения получено в результате программной реализации (см. ниже). Основанием будет

$$G=\begin{pmatrix}0.4 & 1.0 & 1.0 & 0.6 & 1.0 & 0.7\end{pmatrix}.$$

Условие $b\le a_j$ из (28) выполняется для $j=1,4,5,6$, значит, уравнение имеет четыре ответвления:

$$M_1=\begin{pmatrix}0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\{M_1, M_4, M_5, M_6\}$ попарно несравнимы.

Среднее решение

$$\overrightarrow{M} = \max\{M_1; M_4; M_5; M_6\} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 1.0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Основание G, множество ответвлений $\{M_1, M_4, M_5, M_6\}$ и среднее решение определены из программной реализации решения линейных НРУ вида (22). Программный код на языке Python приведен в листинге 1.

Листинг 1. Реализация решения линейного $\max - T$ **уравнения***

```
# FRE_lin_maxT
# Подключение требуемых модулей
from random import randint
from numpy import linspace

# Определение значения t-нормы
def T(x, y):
    # Различные t-нормы
    # return x * y
    # return min(x, y)
    return max(x + y - 1, 0)

# Определения остаточного оператора для расчета основания
def TPlus(a, b):
    t = linspace(0, 1, 10**5)
    result = [z for z in t if round(T(z, a), 4) <= b]
    result = round(b(result), 4) if result else None
    return result

# Определения остаточного оператора для расчета ответвлений
def TMinus(a, b):
    t = linspace(0, 1, 10**5)
    result = [z for z in t if round(T(z, a), 4) >= b]
    result = round(min(result), 4) if result else None
    return result

# Подпрограмма решения линейного max-T уравнения
def linMaxT(a, b):
```

```
    if b <= max(a):
        result = [[TPlus(a[j], b) for j in range(len(a))]]
        for j in range(len(a)):
            if b <= a[j]:
                M = [0] * len(a)
                M[j] = TMinus(a[j], b)
                result += [M]
        # Расчет среднего решения
        mean = result[1][:]
        for j in result[2:]:
            for k in range(len(j)):
                mean[k] = max(mean[k], j[k])
        result += [mean]
    else:
        result = None
    return result

# Основная программа
a = [1.0, 0.2, 0.0, 0.8, 0.4, 0.7]
b = 0.4
print(linMaxT(a, b))
```

*** разработано автором**

Результат работы программы:

[[0.4, 1.0, 1.0, 0.6, 1.0, 0.7], [0.4, 0, 0, 0.6, 1.0, 0.7], [0, 0, 0, 0.6, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1.0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0.7], [0.4, 0, 0, 0.6, 1.0, 0.7]]

Имеем двумерный список, в котором элемент с нулевым индексом (первый по счету) — это список, содержащий значения G. Следующие четыре элемента — ответвления, последний элемент (пятый по индексу или шестой по счету) — среднее решение.

Интерпретация результатов нахождения основания G:

1. Максимальная степень востребованности характеристики товара x_j определяется из основания G. Максимально востребованы характеристики x_2, x_3 и x_5, т. к. именно эти значения в G максимальны (равны 1).

2. Характеристики x_5 и x_7 имеют востребованность выше среднего (т. к. $x_5 = 0.6$, $x_7 = 0.7$).

3. Характеристика x_1 имеет низкую востребованность ($x_1 = 0.4$).

Интерпретация результатов нахождения среднего решения $\overline{M}$:

1. Про характеристики x_2 и x_3 нельзя сказать ничего конкретного, т. к. значения этих параметров лежат в отрезке $[0;1]$.

2. Характеристика x_5 как в G, так и в $\overline{M}$ принимает только одно значение 1, значит, степень ее востребованности максимальна и не имеет диапазона значений.

3. Характеристики x_1, x_4 и x_6 имеют скалярные значения 0.4, 0.6 и 0.7 соответственно, т. е. не имеют диапазона значений. ■

Если программный код в листинге 1–оформить в виде отдельной подпрограммы, например, с именем lin_maxT(), то:

— вызов lin_maxT()[0] вернет основание,
— вызов lin_maxT()[-1] вернет среднее решение,
— вызов lin_maxT()[1:-1] вернет список ответвлений.

Данные вызовы могут быть полезны при решении НРУ более сложных типов.

Заключение

Решение линейных НРУ с различными типами композиций сводятся к решению простейших уравнений. В структуре решения линейных уравнений выделяют основание (наибольшее или наименьшее решение в зависимости от типа композиции), множество ответвлений (наименьших или наибольших решений соответственно) и среднее решение.

При использовании остаточных операторов решения линейных НРУ конструируются в соответствии с определенным алгоритмом:

1. Проверка необходимого и достаточного условия разрешимости.
2. Нахождение основания.
3. Нахождение множества ответвлений.
4. Конструирование среднего решения на основе множества ответвлений.

Алгоритм решений может быть реализован программно, например, на языке программирования Python. Подпрограммы решения линейных НРУ могут быть использованы для решения НРУ более сложных типов.

Результаты полученных решений могут интерпретироваться в зависимости от рассматриваемой предметной области,

Список использованных источников:

1. Асаи К. и др. Прикладные нечеткие системы: пер. с японского / Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. — Москва : Мир, 1993. — 386 с.
2. Блюмин С. Л. и др. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения: Монография / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова, П. В. Сараев, И. В. Черпаков. — Липецк : ЛЭГИ. — 2002. — 111с.
3. Кофман А., Хил Алуха Х. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями: Пер. с исп. / А. Кофман, Х. Хил Алуха — Минск : Выш. шк., 1992. — 224 с.

4. Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин. — Москва : Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит. — 1990. — 272 с.

5. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат; под ред. Ю. В. Тюменцева. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 798 с.

6. Черпаков И. В. Моделирование и анализ связи показателей социально-экономических систем с использованием прямой задачи для нечетких соответствий // ЭФО: Экономика. Финансы. Общество. — 2023. — №2 (6) — С.92-111. — DOI:10.24412/2782-4845-2023-6-92-111.

7. Черпаков, И. В. Основы программирования : учебник и практикум для вузов / И. В. Черпаков. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 219 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9983-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/511703 (дата обращения: 17.08.2023, доступ по логину и паролю).

8. Черпаков И.В. Постановка задачи решения нечетких реляционных уравнений и программная реализация решений уравнений простейшего типа // ЭФО. Экономика. Финансы. Общество. — 2023. — №3 (7). — С.100-123. — DOI:10.24412/2782-4845-2023-7-100-123.

9. De Baets B. Analitic Solution Methods for Fuzzy Relational Equations // Fundamentals of Fuzzy Sets: Handbooks of Fuzzy Sets Series. — Dordrecht : Kluwer, 2000. — Vol. 1. — Ch. 6. — 50 pp.

10. De Baets B., Fodor J. Residual operators of uninorms // Soft Computing. — №3. — 1999. — P. 89–100.

11. Kandasamy V., Smarandache F. Fuzzy Relational Maps And Neutrosophic Relational Maps / V. Kandasamy, F. Smarandache — Hexis : Church Rock. — 2004. — 301 pp.

Сведения об авторе / Information about the author:

Черпаков Игорь Владимирович *– доцент кафедры «Учет и информационные технологии в бизнесе» Липецкого филиала Финансового университета при Правительстве РФ, к.ф-м.н., E-mail: ivcherpakov@fa.ru /* ***Cherpakov Igor Vladimirovich*** *- Associate Professor of the Department of Accounting and Information Technologies in Business, Lipetsk Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Cand. Sci. (Physics and Math), E-mail: ivcherpakov@fa.ru.*
SPIN РИНЦ: 9294-7437
ORCID 0009-0007-5592-0145

Дата поступления статьи: 01.12.2023
Принято решение о публикации: 20.12.2023

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.